İNTEGRAL FORMÜLLERİ

Tanım:

Türevi f(x) olan F(x) ifadesine f(x) in belirsiz integrali veya f(x) in ilkel fonksiyonu denir ve

$\int f(x)\,dx = F(x) + c$

şeklinde gösterilir.

İntegral Alma Kuralları

- $\int adx = a\int dx = ax + c\,, (a \in R)$
- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad , \ (n \neq -1)$
- $\int \frac{1}{x}dx = ln|x| + c$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{ln\,a} + c \quad , \ (a > 0)$
- $\int e^x\,dx = e^x + c$
- $\int sin\,x\,dx = -\,cos\,x + c$
- $\int cos\,dx = sin\,x + c$
- $\int \frac{dx}{sin^2x} = \int(1 + cot^2x)dx = -cotx + c$
- $\int \frac{dx}{cos^2x} = \int(1 + tan^2x)dx = tanx + c$
- $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}arctan\frac{x}{a} + c = -\frac{1}{a}arccot\frac{x}{a} + c$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsin\,x + c = -\,arccos\,x + c$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) + c$

Belirsiz İntegralin Özellikleri

- $\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x)$
- $\int \left(\frac{d}{dx}f(x)\right)dx = f(x) + c$
- $\int d(f(x)) = f(x) + c$
- $\int af(x)dx = a\int f(x)dx \quad , (a \in R)$
- $\int[f(x) \mp g(x)]dx = \int f(x)dx \mp \int g(x)dx$
- $\int f(x)dx = \int f(u)\,du = \int f(t)dt = \cdots$

İntegral Alma Yöntemlari

Değişken Değiştirme Yöntemi

Bu yöntem bir fonksiyon ve onun diferansiyelini içeren bileşke fonksiyonların integrali alınırken kullanılır.

$I = \int f(x)dx$ integralinde $x = u(t)$ dönüşümü yapılırsa $dx = u'(t)dt$ olur. Buradan;

$I = \int f\big(u(t)\big).u'(t)dt$ olur.

Not:

Belirsiz integralde değişken değiştirme yöntemi uygulandıktan sonra sonucun ilk değişken türünde yazılması gerekir.

- $\int[f(x)]^n.f'(x)dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$
- $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = ln|f(x)| + c$
- $\int e^{f(x)}f'(x)dx = e^{f(x)} + c$
- $\int a^{f(x)}f'(x)\,dx = \frac{a^{f(x)}}{ln\,a} + c$
- $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}dx = arcsin\,f(x) + c$
- $\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx = arctan\,f(x) + c$

Kısmi İntegrasyon Yöntemi

$\int f(x).g(x)\,dx$ integralinde $f(x) = u$ ve $g(x)dx = dv$ olacak şekilde u ve dv seçilir.

Buradan;

$\int u.dv = u.v - \int v.du$ elde edilir.

✓ Kısmi integralde u yu seçerken LAPTÜ yöntemini kullanabiliriz. Yani sırasıyla aşağıdaki fonksiyonlardan ilk gördüğümüz u diğeri dv olarak alınır.

Logaritmik fonksiyon

Arc (ters trigonometrik fonksiyonlar)

Polinom fonksiyon

Trigonometrik fonksiyon

Üstel fonksiyon

Rasyonel Fonksiyonların İntegrali

- $\int \frac{m}{(ax+b)^n} dx$ integrali için $ax + b = t$ dönüşümü yapılır. Buradan $a.dx = dt$ olur.

- $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$ için $der(p(x)) \geq der(q(x))$ ise pay paydaya bölünür ve integrali alınır.

- $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ integralinde;

  1. Payda çarpanlarına ayrılabiliyorsa ifade basit kesirlere ayrılır.

  2. Çarpanlarına ayrılamıyorsa ,
     $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctan \frac{x}{a} + c$
     ifadesinen yararlanılarak integral alınır.

Trigonometrik Fonksiyonların İntegralleri

Trigonometrik fonksiyonların integralini bulmak için genel bir kural yoktur. Ancak belli yapıdaki trigonometrik integraller için değişken değiştirmesi veya trigonometrik özdeşlikleri kullanabilir.

- $\int Q(\sin x, \cos x)dx$ şeklindeki integraller:
  İntegrali alınacak fonksiyon sinx ve cosx in rasyonel fonksiyonu şeklinde ise;
  $tan \frac{x}{2} = t$ değişken değiştirmesi yapılır.
  $tan \frac{x}{2} = t \Rightarrow \frac{x}{2} = arctan\, t$
  $\Rightarrow x = 2\, arctan\, t$
  $\Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2} dt$ olur.
  Verilen integralde;
  $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ ve $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ yazarız.

  Buradan t ye bağlı rasyonel fonksiyonun integrali elde edilir. İntegrali aldıktan sonra fonksiyonda t yerine $tan \frac{x}{2}$ yazılır.

- $\int Q(\tan x)\, dx$ şeklindeki integraller:
  İntegrali alınacak fonksiyon tanx in rasyonel fonksiyonu şeklinde ise;
  $\tan x = t$ değişken değiştirmesi yapılır.
  $\tan x = t \Rightarrow x = arctan\, t$
  $\Rightarrow dx = \frac{1}{1+t^2} dt$ olur.
  $\int Q(t). \frac{dt}{1+t^2}$ integraline dönüşür.

- $\int Q(\sin^{2n} x, \cos^{2n} x)dx$ şeklindeki integraller:
  integrali alınacak fonksiyon $\sin^{2n} x$ ve $\cos^{2n} x$ in rasyonel fonksiyonu şeklinde ise;
  $\tan x = t$ değişken değiştirmesi yapılır.
  $\tan x = t \Rightarrow x = arctan\, t$
  $\Rightarrow dx = \frac{1}{1+t^2} dt$ olur.

  Verilen integralde ;
  $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ ve $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ yazarız.
  Buradan t ye bağlı rasyonel fonksiyonun integrali elde edilir. İntegrali aldıktan sonra fonksiyonda t yerine $\tan x$ yazılır.

- $\int \sin^m x . \cos^n x dx$ şeklindeki integraller:
  Bu tür integrallerde üslerin tek veya çift olmasına göre 3 farklı durum vardır.

  1. m çift n tek olsun.
     $n = 2p + 1$ şeklinde yazılır.
     $\int \sin^m x . \cos^n x dx = \int \sin^m x. \cos^{2p+1} x dx$
     $= \int \sin^m x. \cos^{2p} \cos x dx$
     $= \int \sin^m x. (1 - \sin^2 x)^p \cos x dx$
     Buradan $\sin x = t$ dönüşümü yapılır.

  2. m ve n nin her ikisi de çift olsun.
     Bu durumda trigonometrik özdeşliklerden yararlanılır.
     $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ ve $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$
     özdeşlikleri kullanılır.

  3. m ve n nin her ikisi de tek olsun.
     Bu durumda üstü küçük olan fonksiyon parçalanır.
     Örneğin;
     $\int \sin^5 x. \cos^3 x dx$ integralini alırken
     $\int \sin^5 x. \cos^2 x . \cos x\, dx$ şeklinde parçalanır.
     $\int \sin^5 x . (1 - \sin^2 x)^2 \cos x\, dx$
     daha sonra $\sin x = t$ dönüşümü yapılarak sonuca ulaşılır.

- $\int \sin mx . \cos nx\, dx$, $\int \cos mx \cos nx\, dx$, $\int \sin mx. \sin nx\, dx$ şeklindeki integraller:

  Bu tür integralleri hesaplamak için ters dönüşüm formülleri kullanılır.

Ters Dönüşüm Formülleri

✓ $\sin x.\cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$

✓ $\sin x.\sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$

✓ $\cos x.\cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$

Belirli İntegral

Bir eğri parçasının uzunluğu, sınırladığı bölgenin alanı ve hacim hesaplarında kullanılır.

$\int f(x) = F(x) + c$ *olsun.*

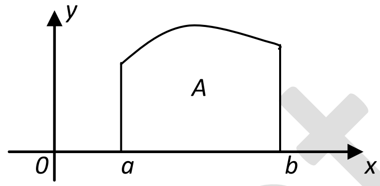
$\int_a^b f(x) = F(b) - F(a)$ *integraline* f *fonksiyonunun* $[a,b]$ *aralığında belirli integrali denir.*

Belirli İntegralin Özellikleri

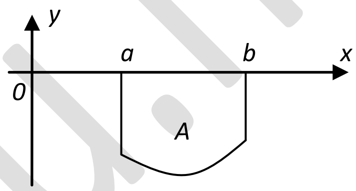
- $\int_a^b A.f(x)dx = A\int_a^b f(x)dx$ *dir.*
- $\int_a^b [f(x) \mp g(x)] = \int_a^b f(x) \mp \int_a^b g(x)$
- $a, b, c \in R$ *ve* $c \in [a,b]$ *ise*
  $\int_a^b f(x) = \int_a^c f(x) + \int_c^b f(x)$
- $\int_a^a f(x) = 0$
- $\int_a^b f(x) = -\int_b^a f(x)$
- $a < b$ *olmak üzere* $[a,b]$ *aralığında* $f(x) \leq g(x)$ *ise*
  $\int_a^b f(x) \leq \int_a^b g(x)$ *dir.*
- $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$
- *f fonksiyonu sürekli ve tek fonksiyon ise,*
  $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$ *dır.*
- *f fonksiyonu sürekli ve çift fonksiyon ise,*
  $\int_{-a}^a f(x)dx = 2.\int_0^a f(x)\,dx$ *dir.*
- $F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(x)\,dx$ *ise,*
  $F'(x) = f(v(x)).v'(x) - f(u(x)).u'(x)$ *dir.*

Alan Hesabı

- $f:[a,b] \to R$ *fonksiyonu için [a,b] aralığında* $f(x) \geq 0$ *ise* $y = f(x)$ *eğrisi* $x = a$ *ve* $x = b$ *doğruları ile x-ekseni arasında kalan düzlemsel bölgenin alanı*
  $A = \int_a^b f(x)\,dx$ *dir.*



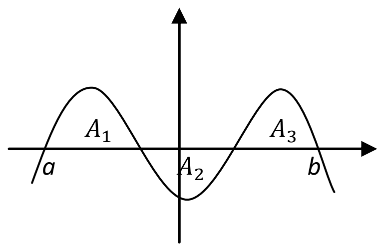
- *[a,b] aralığında* $f(x) \leq 0$ *ise* $y = f(x)$ *eğrisi* $x = a$ *ve* $x = b$ *doğruları ve x- ekseni arasında kalan düzlemsel bölgenin alanı*
  $A = -\int_a^b f(x)\,dx$ *dir.*



- $f:[a,b] \to R$ *fonksiyonu [a,b] aralığında işaret değiştiriyorsa,* $y = f(x)$ *eğrisi,* $x = a$ *ve* $x = b$ *doğruları ve x- ekseni tarafından sınırlanan düzlemsel bölgelerin alanları* A_1, A_2, A_3 *ise*

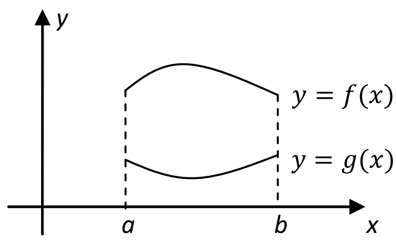
  $A_1 + A_2 + A_3 = \int_a^b |f(x)|\,dx$ *dir.*

  $\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2 + A_3$



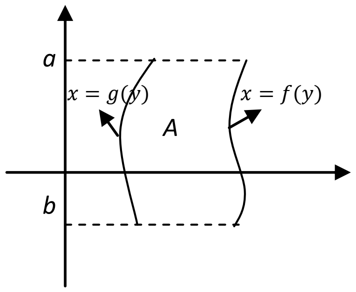
- $y = f(x)$ *ve* $y = g(x)$ *eğrileri ile* $x = a$ *ve* $x = b$ *doğrularının sınırladığı taralı alan A ise*

  $A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$ *olur.*



- $x = f(y)$ ve $x = g(y)$ eğrileri ile $y = a$ ve $y = b$ doğrularının sınırladığı taralı alan A ise

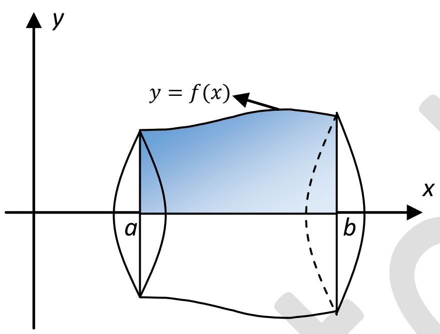
$A = \int_a^b [f(y) - g(y)]\, dy$ olur.



Hacim Hesabı

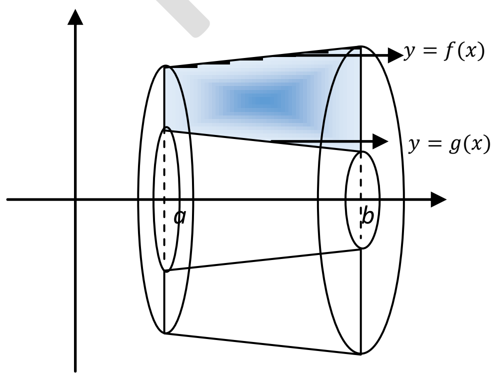
- $y = f(x)$ eğrisi, $x = a$ ve $x = b$ doğruları ve x- ekseni ile sınırlanan taralı bölgenin x- ekseni etrafında 360^o döndürülmesi ile oluşan dönel cismin hacmi V ise

$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\, dx$ dir.



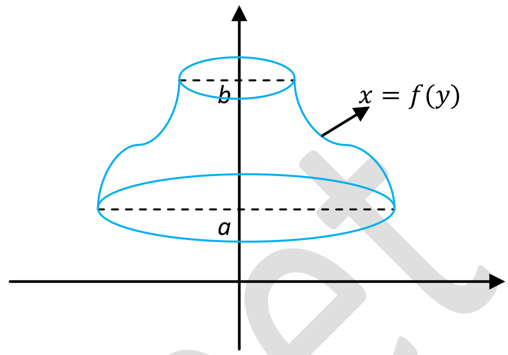
- $y = f(x)$ ve $y = g(x)$ eğrileri , $x = a$ ve $x = b$ doğruları tarafından sınırlanan taralı bölgenin x- ekseni etrafında 360^o döndürülmesi ile oluşan dönel cismin hacmi V ise

$V = \pi \int_a^b \{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\} dx$ dir.



- $x = f(y)$ eğrisi, $y = a$ ve $y = b$ doğruları ile y- ekseni arasında kalan bölgenin y- ekseni etrafında 360^o döndürülmesi ile oluşan cismin hacmi V ise

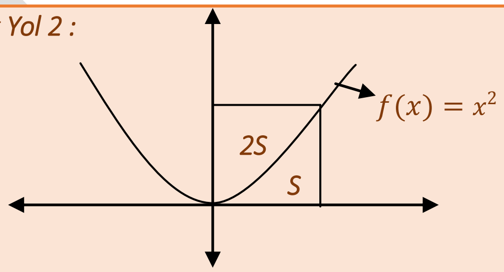
$V = \pi \int_a^b f^2(y)\, dy$ dir.



Pratik Yol 1 :

$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ integrali yarıçapı a br olan bir çeyrek çemberin alanına eşittir.

Pratik Yol 2 :



Parabol grafiğinde alanlar $1/2$ oranında ayrılır